動的線型モデルの統計的解析

杉　原　左　右　一

I　序

企業モデル、産業モデルあるいは又マクロ経済モデルを問わず、所謂計量経済学的なモデルに於て、研究対象とする経済システムの相互連関的かつ動的な変動を如何に把握するかは、対象とする経済システムの運動のメカニズムを、事実に即して解明する事を共通の目的としたこれらのモデルにとって極めて重要な問題である。

この問題に対してはコールズ委員会 (Cowles Commission) による大きな貢献を経て、一般に次の様な動的線型モデル（Dynamic Linear Model）として把握される事が多い。

即ち経済システムを、（当該モデルの）外部からその値が決められる外生変数（独立変数）と、モデルの同時相互的作用によりその値が決められる内生変数（従属変数）、ならびに（確率的）攪乱項の3要素により記述し、その動的な相互依存関係を、当期内生変数、当期外生変数と共に、ラグ付き内生変数及びラグ付き外生変数から構成される、確率的な線型連立方程式体系として定式化するのである。

ここで、変数間の関係をやや模型的に述べるならば、この様な動的線型モデルを、当期及びラグ付き外生変数と、ラグ付き内生変数を入力とし、これに攪乱項が作用し、出力が当期内生変数である様なシステムと対応付ける事が出来るであろう。

但しここで留意しなければならないのは、線型性の仮定が主に統計的解析の

容易さに起因するものであり、より実際的には動的非線型モデルを設定しなければならない事である。動的非線型モデルの解析は、この分野に於ける今後の研究課題に属するものであるが、動的線型モデルは、さしあたりこの様なより一般的モデルへの第一次的な接近として十分その意味を有していると言えるであろう。

さてこの様な動的線型モデルは、マクロ経済モデルに基づく実証的研究に適用され、大きな成果をおさめている事は周知のところであるが、上記した様なこのモデルの持つ基本的な性格の故に、現在企業モデル、産業モデルに関する分析にも同様に使用され始めており、今後さらにこの方面の実証的研究に有効に適用されるものと思われるのである。

本稿はこの様な動的線型モデルに関し、特に単一方程式モデルを中心に、次の様な統計的解析を行うものである。

先ずII節では次の様な動的線型モデルを設定し、その母数推定問題を扱う。即ち、従来動的線型モデルの統計的解析には、(1)外生変数に関して傾向変動（トレンド）を陽表的に仮定しない場合が多く、さらに(2)撹乱項は互いに独立であるか、又は一次の自己回帰過程に従うと仮定される場合が多いのであるが、本稿ではこれにかわって、(1)外生変数に傾向変動（トレンド）を伴う場合をも考慮し、かつ(2)撹乱項が自己回帰一移動平均過程に従うという意味に於て従来のモデルより一般的なモデルを設定し、このモデルに関する母数推定問題を扱う。

III節では動的線型モデルの動的特性について簡単に述べる。動的線型モデルの動的特性を明らかにする事は、研究対象とする経済システムの動的変動のメカニズムを解明すると同時に、モデルに基づく“予測”という観点からも重要な意味を持っている。

最後にIV節で、II節で明らかにした定理の証明を示す。

なお動的線型（非線型）モデルに基づく実証的分析、ならびにその統計的解析についてはさらに引き続き別稿で論及する所存である。

II　動的線型モデルの母数の統計的推定

動的線型モデルの統計的解析については従来から多くの研究がなされているのであるが、その際I節で述べた如く次の様な仮定が設けられる事が多い。

即ち、(1)外生変数に関して傾向変動（トレンド）を陽表的に仮定しない場合が多く、又(2)攪乱項は互いに独立か、又は一次の自己回帰過程に従うと仮定される事が多いのである。

本節では上の仮定にかわって、次の様な意味に於て従来のモデルより一般的な動的線型モデルを設定し、このモデルに関する母数推定問題を扱う。

即ち、先ず(1)外生変数が傾向変動（トレンド）を伴う場合をも陽表的に考慮する。外生変数に傾向変動を考慮する事は多くの実際的なデータとの照合からも意味のある事である。

さらに、(2)攪乱項は自己回帰—移動平均過程（Autoregressive-Moving-average Process：以後簡単化のために ARMA 過程と略記する）により表現されるものとする。攪乱項を ARMA 過程で表現する事は、出来る限り少ない母数でモデルを構成しようとする Tukey, J. W. による所謂“節約の原理”（principle of parsimoney）に照らしても有意味であろう。

以下先ず§1.で本節で扱うモデルとその仮定を明らかにし、次に§2.でこのモデルの持つ意味について述べる。§3.では母数の統計的推定について述べ、§4.で最小2乗推定量の漸近正規性とその性質を明らかにする。

なお傾向変動に関しては、Dhrymes, P. J.〔1〕, Grenander, U.〔2〕, Hatanaka, M.〔5〕が参考になった。

（本稿と関連して、所謂分布ラグモデルに関する母数推定問題については、既に幾つかの推定方法が考案され、その統計的性質が明らかにされている。この事に関する包括的 Survey としては、さしあたり Dhrymes, P. J.〔1〕が参考になる。）

§ 1. モデルと仮定

t 期に於ける、内生変数、s 種類の外生変数、及び攪乱項をそれぞれ y_t, $x_{t,r}$ $(r=1,2,\cdots,s)$, e_t で表わし、次の様な動的線型モデル(1), (2)式に関する母数の統計的推定問題を扱う。

$$(1)\quad \lambda(B)y_t=\sum_{r=1}^{s}\alpha_r(B)x_{t,r}+e_t \qquad t=1,2,\cdots,T$$

$$(2)\quad \phi(B)e_t=\theta(B)u_t \qquad u_t\sim \text{I. I. D. }(0,\sigma^2)$$

ここで $\lambda(B)$、$\alpha_r(B)$ $(r=1,2,\cdots,s)$、$\phi(B)$、$\theta(B)$ は母数を、

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m) \qquad \alpha_r=(\alpha_{0,r},\alpha_{1,r},\cdots,\alpha_{n_r,r}) \qquad r=1,2,\cdots,s$$

$$\phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_p) \qquad \theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q)$$

とする次の様なラグ構造を示す。

$$(3)\quad \lambda(B)=1-\sum_{i=1}^{m}\lambda_iB^i \qquad (4)\quad \alpha_r(B)=\alpha_{0,r}+\sum_{i=1}^{n_r}\alpha_{i,r}B^i \qquad r=1,2,\cdots,s$$

$$(5)\quad \phi(B)=1-\sum_{i=1}^{p}\phi_iB^i \qquad (6)\quad \theta(B)=1-\sum_{i=1}^{q}\theta_iB^i$$

但し、B^i は、時間を i 期間（i は非負の整数）後方に後退させるラグ演算子 (Lag Operator, Backward shift operator) である。(即ち、Z_t を時間 t に依存する変数とすれば、$B^iZ_t=Z_{t-i}$ である。) 以後の便宜のために

$$\mu'=(\lambda,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\phi,\theta) \qquad \nu'=(\mu',\sigma^2)$$

と表わし、以下母数 ν の統計的推定問題を扱う。

このモデルに次の仮定１，２，３を設定する。

仮定 1

$\lambda(\omega)=0$, $\phi(\omega)=0$, $\theta(\omega)=0$ の根は単位円外にある。

仮定 2

$d_{Tr}^2=\sum_{t=1}^{T}x_{t,r}^2$ $(r=1,2,\cdots,s)$ と表わし、次の(i)～(v)を仮定する。

$$(\text{i})\quad \lim_{T\to\infty}\frac{T}{d_{Tr}^2}<\infty \quad (0\text{でもよい}) \qquad r=1,2,\cdots,s$$

$$(\text{ii})\quad \lim_{T\to\infty}T\frac{\max\limits_{1<t<T}x_{t,r}^2}{d_{Tr}^2}<\infty \qquad r=1,2,\cdots,s$$

(iii) $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{d_{Ti}d_{Tj}} \sum_{t=\tau+1}^{T} x_{t,i}x_{t-\tau,j} = \rho_{i,j}(\tau) < \infty$ $\tau=0,1,2,\cdots$ $i,j=1,2,\cdots,s$

$\rho_{i,j}(\tau)$ を (i,j) 成分とする $(s\times s)$ 次の行列を $R(\tau)=[\rho_{i,j}(\tau)]$ で示す。

(iv) $R(0)$ は非特異行列である。

(v) $\lim_{T\to\infty} \frac{d_{Tr}^2}{d_{Ts}^2} < \infty$ (0 でもよい) $r=1,2,\cdots,s-1$

仮定 3

u_t は互いに独立に、同一分布に従い、$E[u_t]=0$, $E[u_t^2]=\sigma^2$ とし、有限な $(4+\varepsilon)$ 次$(\varepsilon>0)$ の絶対モーメントが存在する。

§ 2. モデルの意味

上記した動的線型モデルは次の様なモデルを表わしている。

先ず内生変数については、当期内生変数 y_t の他に、m 期以前までのラグ付き内生変数 $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots, y_{t-m}$ を考慮し、そのラグ構造を $\lambda(B)$ とする。

外生変数については、s 種類の異なったラグ構造 $\alpha_r(B)(r=1,2,\cdots,s)$ を持つ外生変数を考慮し、当期外生変数を $x_{t,r}$、$n_r(r=1,2,\cdots,s)$ 期以前までのラグ付き外生変数を $x_{t-1,r}, x_{t-2,r}, \cdots, x_{t-n_r,r}$ とする。なおモデルに定数項を含ませたい場合には、すべての t について形式的に $x_{t,1}=1$ と置けばよい。

最後に攪乱項 e_t については、それが(2)式で示される様な次数 (p,q) の ARMA 過程(以後簡単化のために ARMA(p,q) 過程と略記する)で表現されるものとする。実際のデータ解析に於て、次数 p,q は高々2である事が多く、この程度の次数で十分振り幅の広いモデルを表現する事が可能である。ARMA(p,q) 過程で、特に $p\neq 0$, $q=0$ の場合が次数 p の自己回帰過程(AR(p) 過程)であり、$p=0$, $q\neq 0$ の場合が次数 q の移動平均過程(MA(q)過程)である。さらに $p=q=0$ であれば e_t は u_t に等しい。

なお本稿では次数 m, s, $n_r(r=1,2,\cdots,s), p, q$ は既知であるものと前提する。

さて次に仮定の意味について述べよう。

先ず仮定1は、過程の定常性(stability)及び反転可能性(invertibility)を保証するものである。

次に外生変数に傾向変動（トレンド）を伴う場合をも考慮し、仮定2を設定する。ところで外生変数に傾向変動（トレンド）を伴う場合として、通常次の仮定2′（Grenander 条件；Grenander, U.〔2〕）が設定される事が多い。

仮定　2′ (Grenander 条件)

(i)　$\lim_{T\to\infty} d^2_{T_r}=\infty$　　　　$r=1,2,\cdots,s$

(ii)　$\lim_{T\to\infty}\dfrac{\max_{1\leq t\leq T} x^2_{t,r}}{d^2_{T_r}}=0$　　　　$r=1,2,\cdots,s$

(iii)　仮定2の(iii)

(iv)　仮定2の(iv)

本モデルでは仮定 2′(i), (ii)にかわって、仮定2(i), (ii)を設定する。(仮定2(i), (ii)については Hatanaka, M.〔5〕を参照した。)

仮定2(i), (ii)は、仮定2′(i), (ii)を満たすが、これよりはやや制約的な仮定であり、特に母数 ν の最小2乗推定量の漸近正規性を示す際に必要となる。仮定2(i), (ii)を満たす外生変数の例としては、例えば時間 t の多項式、3角関数及びその一次結合等を挙げる事が出来よう。

又仮定2(v)は、$d^2_{T_r}(r=1,2,\cdots,s)$ の order に関する仮定であり、$d_{T_r}(r=1,2,\cdots,s-1)$ は $d_{T_r}=O(d_{T_s})$ 又は $d_{T_r}=o(d_{T_s})$ であるとする。

従って仮定2は、傾向変動（トレンド）や季節変動を含む経済時系列の統計的解析に支障なく適用し得るであろう。

なお特にある r について $d_{T_r}=O(T^{\frac{1}{2}})$ であれば、仮定2(ii)からも明らかになる様に、$x_{t,r}$ は(7)式

(7)　$|x_{t,r}|<\infty$　　　　$t=1,2,\cdots$

を満たさねばならない事に注意したい。即ちこの場合には $x_{t,r}(t=1,2,\cdots)$ は有界でなければならない。

最後に仮定3は撹乱項に関するものであり、ここでは u_t に関して正規性の仮定を必要としない。なお $(4+\varepsilon)$ 次 $(\varepsilon>0)$ の絶対モーメントの存在に関する仮定は、母数 ν の最小2乗推定量の漸近正規性を示す際に必要となる。

§ 3. 母数の統計的推定

以下観測データ $D=\{y_t, x_{t,r}\ r=1,2,\cdots,s:t=1,2,\cdots,T\}$ をもとに母数 ν の最小2乗推定量を求め、その漸近正規性とその性質を明らかにする。

先ず(1), (2)式より(8)式を得る。

$$(8)\quad u_t=-\sum_{j=1}^{q}\theta_j u_{t-j}+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{p}\lambda_i\phi_j y_{t-i-j}-\sum_{r=1}^{s}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{n_r}\phi_i\alpha_{j,r}x_{t-i-j,r}\qquad t=1,2,\cdots,T$$

(但し $\lambda_0=1$, $\phi_0=1$)

ところで実際に観測されるデータは $t=1,2,\cdots,T$ についてのデータであるため、(8)式に於てその初期値

$$u_0, u_{-1}, \cdots, u_{1-q}\ ;\ y_0, y_{-1}, \cdots, y_{1-p-m}\ ;\ x_{0,r}, x_{-1,r}, \cdots, x_{1-p-n_r,r}\qquad r=1,2,\cdots,s$$

を求める必要がある。

初期値の求め方には、(i) これらの初期値をすべて0と置くか、又は (ii) これらの値を後退的に予測する事 (back forecasting) が考えられる。これらの方法とは別に、(iii) $t=l+m+p$ (但し $l=\max\{m, n_r\ r=1,2,\cdots,s\}+1$) から u_t を求める方法も考えられる。即ち $t\geqslant l$ なる t について、先ず $\lambda(B)y_t^*=\sum_{r=1}^{s}\alpha_r(B)x_{t,r}$ より y_t^* を求める。次に $e_t=y_t-y_t^*$ を求め、$\theta(B)u_t=\lambda(B)\phi(B)e_t$ より $t\geqslant l+m+p$ なる t について u_t を求めるのである (但し未知な u_t はその期待値である0と置く)。この様にすれば、最初の $(l+m+p-1)$ 個の u_t は使用出来ないが、それ以後は実際に観測されたデータを使用して u_t を計算出来る利点がある。

但しいずれの方法を採用するにしても、仮定1より明らかになる様に、初期値の影響は漸近的に無視出来る。

さて μ の最小2乗推定量 $\hat{\mu}$ は、$\sum u_t^2$ を最小にする事により求められるが、u_t が母数に関して非線型であるため、何らかの非線型推定法を使用しなければならない。非線型推定法については、例えば直接的な方法として格子点探索法、解析的方法として線型化反復法、Newton-Raphson 法、Marquardt 法 (ないしこれらの混合法) 等が挙げられよう。これらの手法は、非線型推定法として基本的なものであり、既に良く知られているところであるから、ここではこれ

らの手法について詳述する事は割愛する。これらの手法と、その問題点に関する survey としては、例えば Powell, M. J. D.〔9〕が参考になろう。

ところで u_t に正規性を仮定する場合には、その対数尤度関数 L は近似的に

$$L=\text{const}-\frac{1}{2}T\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum u_t^2 \tag{9}$$

となる。従って(9)式を最大にする μ の推定量は最小2乗推定量 $\hat{\mu}$ に一致する。

攪乱項 u_t の分散 σ^2 は、$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{T}\sum\hat{u}_t^2$ により推定される。但し $\hat{u}_t$ は(8)式で μ を $\hat{\mu}$ で置きかえたものである。

§4. 最小2乗推定量の漸近正規性とその性質

G_T を $(m+\sum_{r=1}^{s}(n_r+1)+p+q+1)$ 次の次の様な対角行列

$$G_T=\mathrm{diag}(\overbrace{d_{Ts},\cdots,d_{Ts}}^{m},\overbrace{d_{T1},\cdots,d_{T1}}^{n_1+1},\cdots,\overbrace{d_{Ts},\cdots,d_{Ts}}^{n_s+1},\overbrace{\sqrt{T},\cdots,\sqrt{T}}^{p},\overbrace{\sqrt{T},\cdots,\sqrt{T}}^{q},\sqrt{T}) \tag{10}$$

とし、真の母数の値を特に ν_0 で表わせば、動的線型モデル(1),(2)式について次の定理を得る。

定　理

ν_0 の最小2乗推定量を $\hat{\nu}$ とする。

仮定1，2，3の下で、$G_T(\hat{\nu}-\nu_0)$ は平均0ベクトル、共分散行列 $\Sigma=\Omega^{-1}\Omega^*\Omega^{-1}$ の多変量正規分布に法則収束する。即ち、

$$G_T(\hat{\nu}-\nu_0)\longrightarrow N(0,\Sigma)\qquad \text{in } d \tag{11}$$

が成立する。

ここで Ω^* は、(12)式に示される $(m+\sum_{r=1}^{s}(n_r+1)+p+q+1)$ 次の行列であり、その各成分はIV(4)～(15)式により与えられる。又 Ω は、Ω^* で $F, G_1, G_2, \cdots, G_s$ を0ベクトルとし、ω を $\omega'=\frac{1}{2\sigma^2}$ とした行列である。

$$\Omega^*=\frac{1}{\sigma^2}\begin{vmatrix} A & C_1 & C_2 & \cdots & C_s & D & E & F \\ C_1' & B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} & 0 & 0 & G_1 \\ C_2' & B_{12}' & B_{22} & \cdots & B_{2s} & 0 & 0 & G_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_s' & B_{1s}' & B_{2s}' & \cdots & B_{ss} & 0 & 0 & G_s \\ D' & 0 & 0 & \cdots & 0 & P & R & 0 \\ E' & 0 & 0 & \cdots & 0 & R' & Q & 0 \\ F' & G_1' & G_2' & \cdots & G_s' & 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} \tag{12}$$

なお本定理の証明は、(12)式の各成分の具体的な表示と共にⅣ節で与える事にする。

さて上記した定理より以下の諸性質が明らかになる。

((1)) $d_{Ts}=O(T^{\frac{1}{2}+\gamma})$ $(\gamma>0)$ であれば、Ω^*, Ω に於ける $A^{(2)}$, D, E は0行列となる。

又、(a) $a^{(1)}(i,j:\lambda,\lambda)$ を構成する s^2 個の構成要素 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{d_{Ts}^2}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{t-i,k}\gamma_{t-j,l}$ $(k,l=1,2,\cdots,s)$、(b) $c(i,j:\lambda,\alpha_r)$ を構成する s 個の構成要素 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{d_{Ts}d_{Tr}}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{t-i,m}\beta_{t-j,r}$ $(m=1,2,\cdots,s)$、(c) $f(i:\lambda,\sigma^2)$ を構成する s 個の構成要素 $\lim_{T\to\infty}\frac{\kappa_1}{2\sigma\sqrt{T}d_{Ts}}\sum_{t=1}^{T}\gamma_{t-i,n}$ $(n=1,2,\cdots,s)$ の各々について、(a) $d_{Tk}=o(d_{Ts})$, $d_{Tl}=o(d_{Ts})$ の少くとも一方、(b) $d_{Tm}=o(d_{Ts})$、(c) $d_{Tn}=o(d_{Ts})$ が成立するならば、これらの order 条件(a), (b), (c)を満たす各構成要素はすべて0となる。

なお $d_{Tr}=o(d_{Ts})$ なる d_{Tr} が、特に $d_{Tr}=O(T^{\frac{1}{2}})$ であれば、前述した様に $x_{t,r}$ は(7)式を満たさねばならない。即ちこの場合には $x_{t,r}(t=1,2,\cdots)$ は有界でなければならない。

((2)) $d_{Ts}=O(T^{\frac{1}{2}})$であれば、仮定2 (i), (v)より、すべての$r(r=1,2,\cdots,s)$について $d_{Tr}=O(T^{\frac{1}{2}})$ となる。即ち、すべての r について $x_{t,r}$ は(7)式を満たさねばならない。又この場合には Ω^*, Ω に於ける $A^{(2)}$, D, E は非0行列となる。

((3)) 次に u_t の歪度、尖度をそれぞれ $\kappa_1=\frac{1}{\sigma^3}E[u_t^3]$, $\kappa_2=\frac{1}{\sigma^4}E[u_t^4]-3$ で示せば、u_t が $\kappa_1=0$ を満たせば Ω^* に於ける $F, G_1, G_2, \cdots, G_s$ は0ベクトルとなり、$\kappa_2=0$ を満たせば $\omega=\omega'=\frac{1}{2\sigma^2}$ となる。又 $\kappa_1=\kappa_2=0$ であれば(従って u_t が N.I.D.$(0,\sigma^2)$ の場合を含む)、$\Omega^*=\Omega$ となり、従って $\Sigma=\Omega^{-1}$ が成立する。

((4)) 特に d_{Ts} の order に関する条件(即ち $d_{Ts}=O(T^{\frac{1}{2}+\gamma})$ $(\gamma>0)$ か又は $d_{Ts}=O(T^{\frac{1}{2}})$)と、$\kappa_1$ に関する条件(即ち $\kappa_1=0$ か又は $\kappa_1\neq 0$)により、漸近的共分散行列 Σ が以下に述べる様な4通りの型をとる事が明らかになる。但し以後の便宜のために $d_{Ts}=O(T^{\frac{1}{2}+\gamma})$ $(\gamma>0)$, $d_{Ts}=O(T^{\frac{1}{2}})$, $\kappa_1=0$, $\kappa_1\neq 0$ を

それぞれ条件(1)、条件(2)、条件(a)、条件(b)と呼ぶ事にする。

先ずいずれの条件が成立するにせよ、常に（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s$）は互いに漸近的相関を持ち、（$\hat{\phi}, \hat{\theta}$）も互いに漸近的相関を持つ。

次に条件（1-a）が成立する場合には、（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s$）と（$\hat{\phi}, \hat{\theta}$）、及び（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s, \hat{\phi}, \hat{\theta}$）と $\hat{\sigma}^2$ は漸近的に無相関となる。即ち漸近的共分散行列 Σ は、（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s$），（$\hat{\phi}, \hat{\theta}$），$\hat{\sigma}^2$ に関する3つのブロックに完全に分離する。但しこの場合 $\hat{\sigma}^2$ の漸近的分散は $2\sigma^4\left(1+\frac{1}{2}\kappa_2\right)$ であるが、さらに $\kappa_2=0$ が成立すれば（従って u_t が N.I.D.$(0, \sigma^2)$ の場合を含む）$\hat{\sigma}^2$ の漸近的分散は $2\sigma^4$ となり、$\Sigma=\Omega^{-1}$ が成立する。

条件(1-b)が成立する場合には、（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s$）と（$\hat{\phi}, \hat{\theta}$）、及び（$\hat{\phi}, \hat{\theta}$）と $\hat{\sigma}^2$ は漸近的に無相関であるが、（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s$）と $\hat{\sigma}^2$ には漸近的相関がある。

条件(2-a)が成立する場合には、（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s, \hat{\phi}, \hat{\theta}$）と $\hat{\sigma}^2$ は漸近的に無相関であるが、（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s$）と（$\hat{\phi}, \hat{\theta}$）には漸近的相関がある。即ち漸近的共分散行列 Σ は、（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s, \hat{\phi}, \hat{\theta}$）と $\hat{\sigma}^2$ に関する2つのブロックに分離する。

条件(2-b)が成立する場合には、（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s, \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}^2$）は互いに漸近的相関を持つ。

但し上記したいずれの場合も $\kappa_2=0$ であれば $\hat{\sigma}^2$ の漸近的分散は $2\sigma^4$ である。

各条件毎に漸近的共分散行列 Σ の性質を述べれば次の様になる。

条件(a), (b)とは無関係に、d_{Ts} が条件(1)を満たせば（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s$）と（$\hat{\phi}, \hat{\theta}$）、及び（$\hat{\phi}, \hat{\theta}$）と $\hat{\sigma}^2$ は漸近的に無相関であり、条件(2)を満たせば（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s$）と（$\hat{\phi}, \hat{\theta}$）には漸近的相関がある。

逆に条件(1), (2)とは無関係に、κ_1 が条件(a)を満たせば（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s, \hat{\phi}, \hat{\theta}$）と $\hat{\sigma}^2$ は漸近的に無相関であり、条件(b)を満たせば（$\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s$）と $\hat{\sigma}^2$ には漸近的相関がある。

なおおわりに、モデル(1), (2)式と、次の様なモデル(13)式との母数推定に関する性質を比較しておこう。

$$(13) \quad y_t=\sum_{r=1}^{s}\frac{\alpha_r(B)}{\lambda_r(B)}x_{t,r}+\frac{\theta(B)}{\phi(B)}u_t \quad u_t\sim \text{I.I.D.}(0,\sigma^2) \qquad t=1,2,\cdots,T$$

但し、

$$\lambda_r(B)=1-\sum_{i=1}^{l_r}\lambda_{i,r}B^i \qquad r=1,2,\cdots,s$$

$$\lambda_r=(\lambda_{1,r},\lambda_{2,r},\cdots,\lambda_{l_r,r}) \qquad r=1,2,\cdots,s$$

$$\bar{\nu}'=(\lambda_1,\alpha_1,\lambda_2,\alpha_2,\cdots,\lambda_s,\alpha_s,\phi,\theta,\sigma^2)$$

と表わす。

ここで仮定1，2，3（但し仮定1で、$\lambda_r(\omega)=0(r=1,2,\cdots,s)$ の根は単位円外にあると仮定する）の下に、最小2乗推定量 $\hat{\nu}$ の漸近正規性と、その漸近的共分散行列 Σ に関して以下の事を示す事が出来る。

即ち、先ず G_T を $(\sum_{r=1}^{s}(l_r+n_r+1)+p+q+1)$次の次の様な対角行列

$$(14) \quad G_T=\text{diag}(\overbrace{d_{T1},\cdots,d_{T1}}^{l_1+n_1+1},\overbrace{d_{T2},\cdots,d_{T2}}^{l_2+n_2+1},\cdots,\overbrace{d_{Ts},\cdots d_{Ts}}^{l_s+n_s+1},\overbrace{\sqrt{T}\cdots,\sqrt{T}}^{p},\overbrace{\sqrt{T},\cdots,\sqrt{T}}^{q},\sqrt{T})$$

とし、真の母数を特に $\bar{\nu}_0$ で表わせば、

$$(15) \quad G_T(\hat{\bar{\nu}}-\bar{\nu}_0) \longrightarrow N(0,\Sigma) \qquad \text{in } d$$

を示す事が出来る。但し Σ は、Σ を求めたと同様の過程によりこれを求める事が出来る。(Σ の各成分を具体的に表示する事はここでは割愛する。)

又漸近的共分散行列 Σ に関して以下の性質を示す事が出来る。

即ち、先ず条件(1)，(2)，(a)，(b)のいずれの条件が成立するにせよ、常に $(\hat{\lambda}_1, \hat{\alpha}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\lambda}_s, \hat{\alpha}_s)$ は互いに漸近的相関を持ち、又 $(\hat{\phi}, \hat{\theta})$ も互いに漸近的相関を持つ。さらに $(\hat{\lambda}_1, \hat{\alpha}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\lambda}_s, \hat{\alpha}_s)$ と $(\hat{\phi}, \hat{\theta})$、及び $(\hat{\phi}, \hat{\theta})$ と $\hat{\sigma}^2$ は常に漸近的に無相関である。

又 κ_1 が条件(a)を満たせば、$(\hat{\lambda}_1, \hat{\alpha}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s, \hat{\alpha}_s)$，$(\hat{\phi}, \hat{\theta})$，$\hat{\sigma}^2$ は互いに漸近的に無相関となる。即ち漸近的共分散行列 Σ はこれら3つのブロックに完全に分離する。逆に条件(b)を満たせば、$(\hat{\lambda}_1, \hat{\alpha}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\lambda}_s, \hat{\alpha}_s)$ と $\hat{\sigma}^2$ には漸近的相関がある。

特に条件(1), (2), (a), (b)と無関係に、常に $(\hat{\lambda}_1, \hat{\alpha}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\lambda}_s, \hat{\alpha}_s)$ と $(\hat{\phi}, \hat{\theta})$、及び $(\hat{\phi}, \hat{\theta})$ と $\hat{\sigma}^2$ が漸近的に無相関となる事がモデル(13)式の特殊であり、同時にこの事がモデル(1), (2)式との基本的な相異点である。

Ⅲ 動的線型モデルの動的特性

動的線型モデルに関して、その動的特性を明らかにする事は、研究対象とする経済システムの動的変動のメカニズムを解明すると同時に、モデルに基づく“予測”という観点からも重要な意味を持っている。本節では、動的線型モデルの動的特性に関する基本的性質について簡単に述べる事にする。

動的線型モデルⅡ(1), (2)式を、y_t関する確率的非同次定差方程式と見るならば、その一般解は（但し簡単化のために特性方程式に重根がないものとして)、

$$(1)\quad y_t=\sum_{i=1}^{m} c_i w_i{}^t+\sum_{r=1}^{s}\frac{\alpha_r(B)}{\lambda(B)}x_{t,r}+\frac{\theta(B)}{\lambda(B)\phi(B)}u_t=y_t{}^*+\sum_{r=1}^{s}x_{t,r}^*+e_t{}^*$$

となる。ここで右辺第1項はⅡ(1), (2)式の同次解を示し、$w_i(i=1, 2, \cdots, m)$ は特性根、$c_i(i=1, 2, \cdots, m)$ は適当な初期値によって一意に定まる定数であり、右辺第2項、第3項はⅡ(1), (2)式の特別解である。

ところで(1)式より、直ちに動的線型モデルの動的特性を次の3成分により説明出来る事が明らかになる。

即ち内生変数の動的変動が、((1)) 当該モデルの内部構造により特徴づけられる変動（右辺第1項 $y_t{}^*$）と、((2)) 外生変数の影響による変動（右辺第2項 $\sum_{r=1}^{s}x_{t,r}^*$)、及び ((3)) 攪乱項の影響による変動（右辺第3項 $e_t{}^*$）の3変動の総和により構成されると解釈出来るのである。但しこの様な解釈が可能になるのはⅠ節で述べた如く、線型性の仮定に依存しているからであり、この点に再度留意すべきであろう。

さて内生変数の動的変動を理解するためには、これら3成分に関する解析的ないし統計的性質を明らかにしなければならない。

((1)) 先ずモデルの内部構造に基づく変動（$y_t{}^*$）に関しては、同次定差方程

式 $\lambda(B)y_t=0$ の解の性質を調べればよい訳であり、これは定差方程式に関する基本事項として周知のところである。

((2)) 外生変生の影響による変動 $(\sum_{r=1}^{s}x_{t,r}^{*})$ に関しては、$x_{t,r}$ を入力とし、$x_{t,r}^{*}$ を出力とする次の様なインパルス-ステップ応答関係により把握出来る。即ち、

$$(2)\quad x_{t,r}^{*}=v_r(B)x_{t,r} \qquad v_r(B)=\sum_{i=0}^{\infty}v_{i,r}B^i \quad \left(\sum_{i=0}^{\infty}|v_{i,r}|<\infty\right) \qquad r=1,2,\cdots,s$$

と表わした時のインパルス応答係数 $v_{i,r}$ は、適当な初期値のもとに、m次の定差方程式

$$(3)\quad \lambda(B)v_{j,r}=0 \qquad j=n_r+1,n_r+2,\cdots,\quad r=1,2,\cdots,s$$

に従い、そのステップ応答係数 $V_{j,r}=\sum_{i=0}^{j}v_{i,r}$ は、適当な初期値のもとに、$(m+1)$次の定差方程式

$$(4)\quad (1-B)\lambda(B)V_{j,r}=0 \qquad j=n_r+1,n_r+2,\cdots,\quad r=1,2,\cdots,s$$

に従う。(但し(3), (4)式で、Bは添字 j に作用する演算子である。)

((3)) 攪乱項による変動 $(e_t{}^*)$ に関しては、ARMA(p,q), AR(p), MA(q) 過程のそれぞれについて、その統計的性質は既によく知られているところである。

この様に、3成分に関する解析的ないし統計的性質は既に良く知られているのであるが、この種の研究で次になされねばならぬ事は、内生変数及び外生変数の他に、さらに攪乱項を考慮した確率的シミュレーションを行なう事により、これら3成分の相互依存関係を通して生ずる内生変数の動的変動の性質を、対象とする実際の経済現象と照らしつつ、実証的に検証する事であろう。

事実例えば、最近景気循環発生のメカニズムを解明するために、特に相関のある攪乱項を考慮した確率的シミュレーションが行なわれている。景気循環問題に限らず、この種の確率的シミュレーションによる分析は検討に値する今後の問題と言えよう。

Ⅳ　定理の証明

本節ではⅡ節で明らかにした定理の証明を簡単に述べる。

先ず(1)式が成立する。

$$(1)\quad G_T^{-1}\frac{\partial L}{\partial \nu}=-G_T^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial \nu \partial \nu'}G_T^{-1}\cdot G_T(\hat{\nu}-\nu_0)+(3\text{次の項})$$

但し $\dfrac{\partial L}{\partial \nu}$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \nu \partial \nu'}$ は共に $\nu=\nu_0$ で評価したものである。

$1\times(m+\sum_{r=1}^{s}(n_r+1)+p+q+1)$ 次の実ベクトルを K で示し、$KG_T^{-1}\dfrac{\partial L}{\partial \nu}=\sum_{t=1}^{T}W_t$ とする。又 $\delta_{t-i}(i=1,2,\cdots,m)$, $\zeta_{t-i}(i=1,2,\cdots,p)$, $\eta_{t-i}(i=1,2,\cdots,q)$ に於ける u_t に関する無限列を $t-l$ で truncate し、対応する W_t を W_t^* で示す。次に正整数 k を、$k>2l$ かつ $T=kN+r(0\leqslant r<k)$ なる様に任意に固定する。

仮定2，3より、$E|u_t|^{2(2+\delta)}<\infty$ なる $\delta>0$ が存在し、固定した k,l について、$\sum_{j=1}^{N}E|W^*_{k(j-1)+1}+\cdots\cdots+W^*_{kj-l}|^{2+\delta}\longrightarrow 0(as\ N\to\infty)$ なる事を示す事が出来る。従って Liapounov 中心極限定理より、

$$(2)\quad G_T^{-1}\frac{\partial L}{\partial \nu}\longrightarrow N(0,\Omega^*)\qquad \text{in } d$$

を示す事が出来る。又

$$(3)\quad -G_T^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial \nu \partial \nu'}G_T^{-1}\longrightarrow \Omega\qquad \text{in } p$$

を示す事が出来る。

従って(1), (2), (3)式より本定理が証明される。

ここで Ω^* は、Ⅱ(12)式で示され、その各成分は(4)～(15)式によって与えられる。又 Ω は、Ω^* で $F,G_1,G_2,\cdots,G_s$ を0ベクトル、ω を $\omega'=\dfrac{1}{2\sigma^2}$ とした行列である。

$$(4)\quad A=A^{(1)}+A^{(2)}\quad A=\{a(i,j:\lambda,\lambda)\},\ A^{(k)}=\{a^{(k)}(i,j:\lambda,\lambda)\}\ k=1,2\quad A^{(1)}=A^{(1)\prime}$$

$$a^{(1)}(i,j:\lambda,\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{d_{T_s}^2}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{r=1}^{s}\gamma_{t-i,r}\right)\left(\sum_{r=1}^{s}\gamma_{t-j,r}\right)\qquad i,j=1,2,\cdots,m$$

$$a^{(2)}(i,j:\lambda,\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{T}{d^2_{Ts}}\cdot E[\delta_{t-i}\cdot\delta_{t-j}]=a^{(2)}_{|i-j|}\qquad i,j=1,2,\cdots,m$$

(5) $B_{hl}=\{b(i,j:\alpha_h,\alpha_l)\}\qquad B_{lh}=B'_{hl}$

$$b(i,j:\alpha_h,\alpha_l)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{d_{Th}d_{Tl}}\sum_{t=1}^{T}\beta_{t-i,h}\beta_{t-j,l}\qquad \begin{matrix} i=0,1,\cdots,n_h\ \ j=0,1,\cdots,n_l \\ h,l=1,2,\cdots,s\ \ (h\leqq l)\end{matrix}$$

(6) $C_r=\{c(i,j:\lambda,\alpha_r)\}$

$$c(i,j:\lambda,\alpha_r)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{d_{Ts}d_{Tr}}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{r=1}^{s}\gamma_{t-i,r}\right)\beta_{t-j,r}\qquad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,m\ \ j=0,1,\cdots,n_r \\ r=1,2,\cdots,s\end{matrix}$$

(7) $D=\{d(i,j:\lambda,\phi)\}$

$$d(i,j:\lambda,\phi)=\lim_{T\to\infty}\frac{\sqrt{T}}{d_{Ts}}\cdot E[\delta_{t-i}\cdot\zeta_{t-j}]=d_{i-j}\qquad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,p\end{matrix}$$

(8) $E=\{e(i,j:\lambda,\theta)\}$

$$e(i,j:\lambda,\theta)=\lim_{T\to\infty}\frac{\sqrt{T}}{d_{Ts}}\cdot E[\delta_{t-i}\cdot\eta_{t-j}]=e_{i-j}\qquad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,q\end{matrix}$$

(9) $F=\{f(i:\lambda,\sigma^2)\}$

$$f(i:\lambda,\sigma^2)=\lim_{T\to\infty}\frac{\kappa_1}{2\sigma\sqrt{T}d_{Ts}}\sum_{t=1}^{T}\sum_{r=1}^{s}\gamma_{t-i,r}\qquad i=1,2,\cdots,m$$

(10) $G_r=\{g(i:\alpha_r,\sigma^2)\}$

$$g(i:\alpha_r,\sigma^2)=\lim_{T\to\infty}\frac{\kappa_1}{2\sigma\sqrt{T}d_{Tr}}\sum_{t=1}^{T}\beta_{t-i,r}\qquad \begin{matrix} i=0,1,\cdots,n_r \\ r=1,2,\cdots,s\end{matrix}$$

(11) $P=\{p(i,j:\phi,\phi)\}$

$$p(i,j:\phi,\phi)=E[\zeta_{t-i}\cdot\zeta_{t-j}]=p_{|i-j|}\qquad i,j=1,2,\cdots,p$$

(12) $Q=\{q(i,j:\theta,\theta)\}$

$$q(i,j:\theta,\theta)=E[\eta_{t-i}\cdot\eta_{t-j}]=q_{|i-j|}\qquad i,j=1,2,\cdots,q$$

(13) $R=\{r(i,j:\phi,\theta)\}$

$$r(i,j:\phi,\theta)=E[\zeta_{t-i}\cdot\eta_{t-j}]=r_{i-j}\qquad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,p \\ j=1,2,\cdots,q\end{matrix}$$

(14) $\omega=\frac{1}{2\sigma^2}\left(1+\frac{1}{2}\kappa_2\right)$　　(15) $\omega'=\frac{1}{2\sigma^2}$

但し $\beta_{t,r}(r=1,2,\cdots s,)$, $\gamma_{t,r}(r=1,2,\cdots,s)$, δ_t, ζ_t, η_t, κ_1, κ_2 はそれぞれ(16)～(22)式によって与えられる。

(16) $\beta_{t,r}=\frac{\phi(B)}{\theta(B)}x_{t,r} \qquad r=1,2,\cdots,s$

(17) $\gamma_{t,r}=\frac{\phi(B)\alpha_r(B)}{\theta(B)\lambda(B)}x_{t,r} \qquad r=1,2,\cdots,s$

(18) $\delta_t=\frac{1}{\lambda(B)}u_t$

(19) $\zeta_t=\frac{1}{\phi(B)}u_t$

(20) $\eta_t=-\frac{1}{\theta(B)}u_t$

(21) $\kappa_1=\frac{1}{\sigma^3}E[u_t^3]$

(22) $\kappa_2=\frac{1}{\sigma^4}E[u_t^4]-3$

(1973年7月30日)

(筆者は関西学院大学商学部講師)

<参考文献>

〔1〕 Dhrymes, P. J., Distributed Lags, Problems of Estimation and Formulation, Holden-Day, 1971

〔2〕 Grenander, U., "On the Estimation of Regression Coefficients in the case of an Autocorrelated Disturbance," Ann. Math. Statist., 1954, 25, 252—272

〔3〕 Hannan, E. J., "The Estimation of Reltionships Involving Distributed Lags," Econometrica, 1965, 33, 206—224

〔4〕 Hannan, E. J. and D. F. Nicholls, "The Estimation of Mixed Regression, Autoregression, Moving Average, and Distributed Lag Models," Econometrica, 1972, 40, 529—547

〔5〕 Hatanaka, M., "An Efficient Two-Step Estimator for the Dynamic Adjustment Model with Autoregressive Errors," 1973

〔6〕 Klein, L. R., An Essay on the Theory of Economic Prediction, Markham, 1971

〔7〕 Maddala, G. S., "Generalized Least Squares with an Estimated Variance Covariance Matrix," Econometrica, 1971, 39, 23—33

〔8〕 Pierce, David A., "Least Squares Estimation in Dynamic-Disturbance Time Series Models," Biometrika, 1972, 59, 73—78

〔9〕 Powell, M. J. D., "A Survey of Numerical Methods for Unconstrained Optimization," S.I.A.M. Rev., 1970, 12, 79—97

〔10〕 Wallis, K. F., "Lagged Dependent Variables and Serially Correlated Errors : A Reapprasial of Three-Pass Least Squares," Review of Economics and Statistics, 1967, 69, 555—567